

# Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 3

SoSe 2015

Abgabe: 07.05.2015

---

## [H7] Pauli-Matrizen

(3 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma^1 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}.$$

(b) Für  $a_\mu = (a_0, \vec{a})$  und  $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$  ist zu prüfen, dass

$$\text{tr } a_\mu \sigma^\mu = 2a_0$$

und

$$\det a_\mu \sigma^\mu = a_0^2 - \vec{a}^2.$$

## [H8] 2×2-Dichtematrizen

(4 Punkte)

Jede 2×2-Dichtematrix kann wegen  $\rho = \rho^\dagger$  und  $\text{tr} \rho = 1$  in der Basis  $\{\sigma^\mu\}$  der hermiteschen 2×2-Matrizen parametrisiert werden als

$$\rho = \frac{1}{2} a_\mu \sigma^\mu = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}). \quad (1)$$

Andererseits wissen wir, dass es zwei orthonormierte Eigenkets  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  geben muss, so dass

$$\rho = p |+\rangle\langle +| + (1-p) |-\rangle\langle -| \quad \text{mit } 0 \leq p \leq 1. \quad (2)$$

- Berechnen Sie  $\det \rho$ . Welche Bedingung an  $\vec{a}$  folgt aus der Einschränkung  $0 \leq p \leq 1$ ? Beschreiben Sie geometrisch die Menge aller Dichtematrizen (1).
- Geben Sie eine minimale Liste von Operatoren  $\Omega_i$  an, aus deren gemessenen Erwartungswerten  $\langle \Omega_i \rangle = \text{tr}(\rho \Omega_i)$  Sie  $\vec{a}$  ermitteln und damit  $\rho$  rekonstruieren können.
- Bestimmen Sie  $p$  als Funktion von  $\vec{a}$ . Finden Sie die Eigenkets  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  in der Parametrisierung (2).
- Schreiben Sie  $\rho^2$  in der Darstellung (1). Wie groß ist  $\text{tr} \rho^2$ ?
- Diskutieren Sie den reinen Fall. Was geschieht mit den Ergebnissen (a)–(d)?
- Was passiert bei  $\vec{a} = 0$ ?

**Bitte wenden**

**[H9] Langlebige und kurzlebige Kaonen****(3 Punkte)**

Die in einem Experiment zum Zeitpunkt  $t = 0$  erzeugten neutralen Kaonen oder Anti-Kaonen sind verschiedene Linearkombinationen der Zustände  $|K_L\rangle$  und  $|K_S\rangle$  (langlebige bzw. kurzlebige Kaonen), genauer:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle + |K_L\rangle) \quad \text{oder} \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle - |K_L\rangle).$$

Zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$  hat sich ein langlebiger bzw. kurzlebiger Kaon-Zustand entwickelt gemäß

$$|K_S(t)\rangle = e^{-i\omega_S t}|K_S\rangle \quad \text{bzw.} \quad |K_L(t)\rangle = e^{-i\omega_L t}|K_L\rangle,$$

wobei  $\omega_S < \omega_L$ . Hierbei bleibt der Zerfall der Kaonen unberücksichtigt! Sei nun  $|\psi(t=0)\rangle = |K^0\rangle$ . Bestimmen Sie  $|\psi(t)\rangle$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt  $t$  ein  $\bar{K}^0$  zu finden (mit Skizze des Ergebnisses).